

Урок 1

Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Підручник - Мерзляк "Алгебра, 8 клас", 2021 р.

Пізнання законів природи неможливе без знання квадратних рівнянь. Їх використовують у фізиці, інформатиці, біології, хімії, астрономії та інших науках для розв'язування завдань на просторові форми й кількісні співвідношення, створення програм для обробки звуку, відео, векторної графіки тощо.

Означення. Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a , b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a , b і c називають коефіцієнтами квадратного рівняння. Число a називають першим або старшим коефіцієнтом, число b — другим коефіцієнтом, число c — вільним членом.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

$$\underbrace{ax^2 + bx + c = 0}_{\substack{\text{Квадратне} \\ \text{рівняння}}} \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{c}_{\text{Вільний член}} \\ \underbrace{b}_{\text{Другий коефіцієнт}} \\ \underbrace{a}_{\text{Старший коефіцієнт, } a \neq 0} \end{array} \right.$$

Підкресли рівняння, які є квадратними:

- а) $x^2 + 3x + 1 = 0$;
- б) $5x^3 - x^2 + 4 = 0$;
- в) $2x^2 + 3x - 7 = 0$;
- г) $x^3 - x - 6 = 0$.

Підкресли рівняння, які неможна представити у вигляді квадратного рівняння:

У підкреслених рівняннях назви коефіцієнти a , b та вільний член c .

- а) $(x + 1)(x - 1) = 0$;
- б) $2x^2 = 3x - 2$;
- в) $(x - 3)^3 = 3$;
- г) $x(x - 1) - (3 + x^2) = 0$;
- д) $5 - x = x(2x + 1)$;
- е) $3x - 1 = 2(x + 1)$.

Склади квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, якщо його коефіцієнти дорівнюють:

а) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$: _____

б) $a = 3$, $b = -3$, $c = 1$: _____

в) $a = -1$, $b = 0,5$, $c = \frac{1}{5}$: _____

Склади квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, якщо його коефіцієнти дорівнюють:

а) $a = 2, b = 3, c = 4$: _____

б) $a = 3, b = -3, c = 1$: _____

в) $a = -1, b = 0,5, c = \frac{1}{3}$: _____

г) $a = 5, b = 2, c = 0$: _____

д) $a = 1, b = 0, c = 7$: _____

е) $a = -\frac{1}{3}, b = 0, c = -8$: _____

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним**.

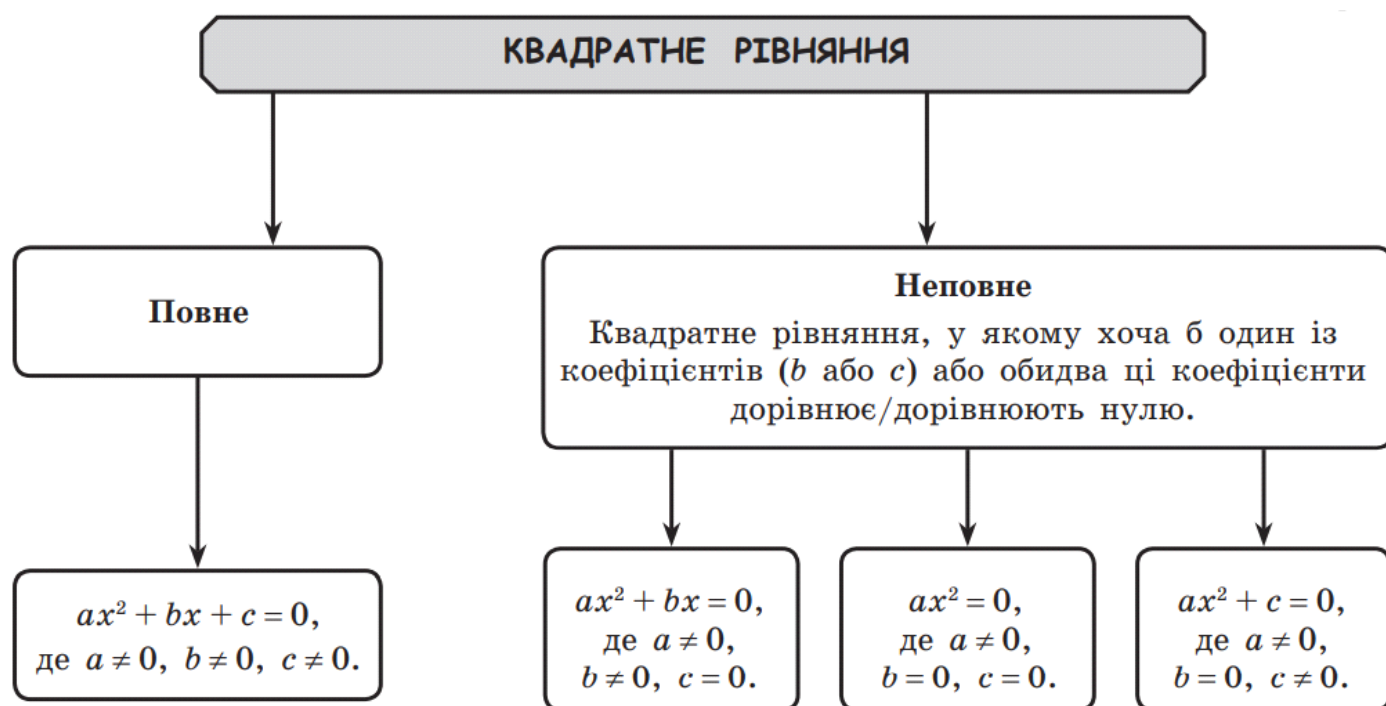
Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — це зведені квадратні рівняння.

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число a , отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

596.° Укажіть, які з даних рівнянь є зведеними, і перетворіть незведені рівняння у зведені:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$; 5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;

2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$; 4) $16 - 6x + x^2 = 0$; 6) $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$.



Виконай вправу:

[Неповні квадратні рівняння](#)

★ Запам'ятай окремі випадки розв'язування квадратних рівнянь.

Випадок 1. Якщо $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, тоді квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ набуває вигляду $ax^2 + bx = 0$.

Алгоритм розв'язування рівнянь виду $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

1. Винеси спільний множник за дужки, щоб отримати рівняння виду $x(ax + b) = 0$.
2. Скористайся правилом рівності добутку нулю (добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю).

Отже, рівняння $x(ax + b) = 0$ рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$x = 0 \text{ або } ax + b = 0;$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

3. Запиши відповідь: 0 ; $-\frac{b}{a}$.

Наприклад,

$$3x^2 - 12x = 0;$$

$$3x(x - 4) = 0; | : 3$$

$$x(x - 4) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x - 4 = 0;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4.$$

Відповідь: 0 ; 4 .

Розв'язи рівняння:

а) $x^2 - 4x = 0$;

б) $x^2 + 6x = 0$;

в) $3x^2 + x = 0$;

г) $x^2 - 0,5x = 0$.

Випадок 2. Якщо $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, тоді квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ набуває вигляду $ax^2 + c = 0$.

Алгоритм розв'язування рівнянь виду $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$)

1. Перенеси доданок c , що не містить змінної, у праву частину рівняння й поділи обидві його частини на a , щоб отримати рівняння $x^2 = -\frac{c}{a}$.

2. Проаналізуй знак виразу $-\frac{c}{a}$:

— якщо коефіцієнти a і c мають один знак, то $-\frac{c}{a} < 0$ і рівняння $x^2 = -\frac{c}{a}$ не має коренів;

— якщо коефіцієнти a і c мають різні знаки, то $-\frac{c}{a} > 0$ і рівняння $x^2 = -\frac{c}{a}$ має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Випадок 3. Якщо $b = 0$, $c = 0$, $a \neq 0$, тоді квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ набуває вигляду $ax^2 = 0$. Рівняння при будь-яких значеннях $a \neq 0$ має єдиний корінь $x = 0$.

Зразок 1.

$$4x^2 - 9 = 0;$$

$$4x^2 = 9;$$

$$x^2 = \frac{9}{4};$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm 1,5.$$

Відповідь: $-1,5; 1,5$.

Зразок 2.

$$\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0;$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0; | \cdot 2$$

$$x^2 - 16 = 0;$$

$$x^2 = 16;$$

$$x = \pm 4.$$

Відповідь: $-4; 4$.

Зразок 3.

$$2x^2 + 7 = 0;$$

$$x^2 = -3,5.$$

Відповідь: коренів немає, оскільки $x^2 \geq 0$ для будь-якого дійсного числа.

601.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 45 = 0;$

3) $2x^2 - 10 = 0;$

5) $64x^2 - 9 = 0;$

2) $x^2 + 8x = 0;$

4) $2x^2 - 10x = 0;$

6) $x^2 + 16 = 0.$

603.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4;$

2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x;$

3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x.$

Розв'яжемо третє рівняння разом:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2x - 6 - (x^2 - 25) &= x^2 - x \\ \cancel{x^2} - \cancel{x} - 6 - \cancel{x^2} + 25 &= \cancel{x^2} - \cancel{x} \\ -x^2 + 19 &= 0 \\ -x^2 &= -19 \\ x^2 &= 19 \end{aligned}$$

$$x_1 = \sqrt{19}, \quad x_2 = -\sqrt{19}.$$

Відповідь: $\pm \sqrt{19}$.

Кожному рівнянню постав у відповідність твердження про його корені.

1 $x^2 = 16$

А Має два раціональних корені

2 $x^2 = 3$

Б Має два ірраціональних корені

? 3 $x^2 = 1$

4 $x^2 = -9$

В Не має коренів

5 $x^2 = -1$

6 $x^2 = 32$

Виконай вправу:

Неповні квадратні рівняння

610.* При якому значенні m :

- 1) число 2 є коренем рівняння $x^2 + mx - 6 = 0$;
- 2) число -3 є коренем рівняння $2x^2 - 7x + m = 0$;
- 3) число $\frac{1}{7}$ є коренем рівняння $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

Виконаємо третє завдання разом. Для цього підставимо $\frac{1}{7}$ замість x та розв'яжемо отримане рівняння:

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 + 14 \cdot \frac{1}{7} - 3 = 0$$

$$m^2 \cdot \frac{1}{49} + 2 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{49} m^2 - 1 = 0$$

$$\frac{1}{49} m^2 = 1$$

$$m^2 = 1 \cdot \frac{1}{49}$$

$$m^2 = 49$$

$$m_1 = \sqrt{49}, \quad m_2 = -\sqrt{49}$$

$$m_1 = 7, \quad m_2 = -7$$

Відповідь: ± 7 .

Домашнє завдання:

Опрацювати параграф 3 п. 18, виконати вправи 593, 597, 602, 604, за бажанням - 611.

Додаткові завдання:

Заповни таблицю. Запиши коефіцієнти квадратного рівняння.

№	Рівняння	Старший коефіцієнт (a)	Другий коефіцієнт (b)	Вільний член (c)
<input type="radio"/> 1	$3x^2 - 7x + 2 = 0$			
<input type="radio"/> 2	$7x^2 + 5x - 1 = 0$			
<input type="radio"/> 3	$10x^2 - 3 = 0$			
<input type="radio"/> 4	$x^2 - 4x = 0$			
<input type="radio"/> 5	$-x^2 = 0$			
<input type="radio"/> 6	$\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{3}{5} = 0$			
<input type="radio"/> 7	$5x^2 = 0$			
<input type="radio"/> 8	$8x^2 - x = 0$			
<input type="radio"/> 9	$x^2 - 12 = 0$			
<input type="radio"/> 10	$-x^2 - 7x - 2 = 0$			

Заповни таблицю. Склади рівняння за поданими коефіцієнтами.

№	Рівняння	Старший коефіцієнт (a)	Другий коефіцієнт (b)	Вільний член (c)
<input type="radio"/> 1		3	-4	5
<input type="radio"/> 2		1	-2	7
<input type="radio"/> 3		-3	0	2
<input type="radio"/> 4		2	-3	0
<input type="radio"/> 5		5	0	-7
<input type="radio"/> 6		0	50	-1,2
<input type="radio"/> 7		100	0,1	$\sqrt{2}$
<input type="radio"/> 8		0,4	-4,4	$\frac{1}{4}$
<input type="radio"/> 9		$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$	c
<input type="radio"/> 10		$\sqrt{5}$	$\frac{1}{3}$	a